DODATEK DO ROCZNIKA
POLSKIEGO TOWARZYSTWA
MATEMATYCZNEGO

TOM VI

MIROSŁAW KRZYŻAŃSKI

O UOGÓLNIONYCH FUNKCJACH BEZWZGLĘDNIE CIĄGŁYCH DWÓCH ZMIENNYCH

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1934
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazuje się w miarę potrzeby ogłaszania artykułów, pisanych w języku polskim; dotychczas ukazał się Tom I za rok 1922, Tom II za rok 1923, Tom III za rok 1927, Tom IV za rok 1928 i Tom V za rok 1931.

DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM VI

MIROSŁAW KRZYŻAŃSKI

O UOGÓLNIONYCH FUNKCJACH BEZWZGLĘDNIE CIĄGŁYCH DWÓCH ZMIENNYCH

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

Biblioteka Jagiellońska
1003047185

KRAKÓW 1934
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

101760
III

Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazuje się w miarę potrzeby ogłaszania artykułów, pisanych w języku polskim; dotychczas ukazał się Tom I za rok 1922, Tom II za rok 1923, Tom III za rok 1927, Tom IV za rok 1928 i Tom V za rok 1931.

B C 3

Mirosław Krzyżański.

O uogólnionych funkcjach bezwzględnie ciągłych dwóch zmiennych.

Wstęp.

H. Looman [1]) dokonał totalizacji mocnej pochodnej skończonej funkcji prostokąta, przez rozszerzenie na płaszczyznę dwóch zmiennych metody stosowanej przez Denjoy.

Przed podaniem sposobu konstrukcji funkcji pierwotnej stwierdził, że pierwotna jest jednoznacznie określona przez skończoną pochodną w znaczeniu Banacha.

Badania Loomana nie wykraczały jednak poza poszukiwanie pierwotnej o pochodnej mocnej skończonej.

W niniejszej pracy podane będzie określenie operacji całkowej D', analogicznej do całki szczególnej Denjoy. W tym celu wprowadzę pojęcie funkcji prostokąta bezwzględnie ciągłej na zbiorze płaskim i posiadającej przyrost określony na tym zbiorze.

Opierając się na tem pojęciu, określę funkcje uogólnione bezwzględnie ciągłe, które będą całkami nieoznaczonemi D' swych pochodnychw znaczeniu Banacha, istniejących prawie wszędzie. Okaże się, że całka D' obejmuje pierwotną Loomana.

Całka D' zostanie także określona konstrukcyjnie przez rozszerzenie operacyj niewłaściwych Cauchy'ego i Harnack'a, i zastosowanie ich oparte na indukcji pozaskończonej.

Aby uzyskać jednoznaczność całki D', muszę wzmocnić warunki Loomana, dotyczące operacji Harnack'a, przez zastosowanie *regularnej zbieżności* całek na prostokątach dotykających zbiór domknięty.

---

[1]) H. Looman. Sur la totalisation des nombres derivés des fonctions continues de plusieurs variables indépendantes. Fundamenta Math., t. 4 (1923) p. 246—285. Pracę tę będziemy krótko cytowali: „Sur la totalisation".

W ostatnim rozdziale podam definicję całki P', odpowiadającej całce pojedyńczej Perrona. Opieram się na wprowadzonem przez J. Riddera[1]) pojęciu funkcji nawpół bezwzględnie ciągłej uogólnionej. Stwierdzimy, że całka P' jest równoważna całce D'.

I. Definicje i własności funkcyj prostokąta o wahaniu skończonem uogólnionem i bezwzględnie ciągłych uogólnionych.

§ 1. Zanim podane będą definicje funkcyj prostokąta o wahaniu skończonem na zbiorze i bezwzględnie ciągłych na zbiorze, zmienimy nieco określenia wahania na zbiorze i bezwzględnej ciągłości na zbiorze funkcyj jednej zmiennej, przyjmując za punkt wyjścia określenia p. S. Saksa, oparte na koncepcjach Łuzina i Chinczina. Zmienione określenia będą skolei punktem wyjścia do definicji wahania funkcyj prostokąta i bezwzględnej ciągłości funkcyj prostokąta na zbiorze.

Wychodzimy więc z następujących określeń[2]):

1°. *Wahaniem mocnem* $V^*(F; E)$ funkcji $F(x)$ na zbiorze E nazywamy kres górny sum:

$$\sum_k \omega(F; I_k),$$

gdzie $\omega(F; I_k)$ jest oscylacją funkcji $F(x)$ w przedziale I_k, zaś $\{I_k\}$ jest układem skończonym przedziałów niezachodzących na siebie, o krańcach należących do E.

Jeżeli $V^*(F; E)$ jest skończone, funkcja $F(x)$ jest *o wahaniu skończonem na zbiorze E w znaczeniu węższem.*

2°. Funkcję $F(x)$ będziemy nazywali *bezwzględnie ciągłą na zbiorze E w znaczeniu węższem,* jeżeli do każdego $\varepsilon > 0$ można dobrać takie $\eta > 0$, że dla każdego układu skończonego przedziałów $\{I_k\}$ niezachodzących za siebie, o krańcach należących do zbioru E, nierówność:

$$\sum_k |I_k| < \eta$$

pociąga za sobą:

$$\sum_k \omega(F; I_k) < \varepsilon.$$

---

[1]) J. Ridder. Über den *Perronschen Integralbegriff*. Mat. Zeitschr. 34 (1932), p. 234.

[2]) Określenia te zostały przyjęte przez p. Saksa w monografji: „Théorie de l'intégrale", Warszawa 1933, p. 158.

Zanim przeprowadzone zostaną zamierzone zmiany powyższych określeń, udowodnimy następujący:

L e m m a t. *Jeżeli funkcja $F(x)$ jest ciągła*[1]) *w przedziale zamkniętym (a, b), wówczas istnieje punkt c, zawarty w tym przedziale i taki, że:*

$$|F(b) - F(c)| + |F(c) - F(a)| \geqslant \omega[F; (a, b)].$$

D o w ó d. Niech μ oznacza największą z czterech liczb:

$$M - F(a),\ F(a) - m,$$
$$M - F(b),\ F(b) - m,$$

gdzie M i m są kresami odpowiednio górnym i dolnym funkcji $F(x)$ w przedziale (a, b). Ze względu na ciągłość $F(x)$, istnieje w (a,b) punkt c taki, że jedna z liczb: $|F(c) - F(a)|$, $|F(c) - F(b)|$ jest równa μ. Punkt c jest, jak łatwo widzieć, żądanym punktem. Udowodnimy to dla wypadku, gdy: $\mu = M - F(a)$, a więc:

$$F(c) = M.$$

Z założenia powyższego wynika nierówność:

$$F(b) - m < M - F(a),$$

czyli:

$$F(a) - m < M - F(b).$$

Zatem:

$$\omega[F; (a, b)] = M - m = [M - F(a)] + [F(a) - m] \leqslant$$
$$\leqslant [M - F(a)] + [M - F(b)],$$

czyli:

$$\omega[F; (a, b)] \leqslant |F(c) - F(a)| + |F(b) - F(c)|.$$

Przechodzimy teraz do zamierzonych zmian w podanych określeniach.

Niech:

$$V'[F; E] = \sup \sum_i |F(b_i) - F(a_i)|,$$

gdzie przedziały (a_i, b_i) tworzą układ skończony, nie zachodzą na siebie, i zawarte są między kresami zbioru E, przyczem każdy z nich zawiera punkty zbioru E. Liczbę tę nazwiemy *wahaniem funkcji $F(x)$ na zbiorze E.*

Funkcję $F(x)$ będziemy nazywali *o wahaniu skończonem na zbiorze E*, jeżeli $V'[F; E]$ jest skończone.

---

[1]) Lemmat ten jest też prawdziwy, gdy $F(x)$ jest dowolną funkcją skończoną.

Stwierdzimy, że oba wahania, V^* i V', są jednocześnie skończone, przynajmniej dla funkcyj ciągłych.

Jeżeli krańce przedziału (a, b) należą do zbioru E, istnieje, na zasadzie udowodnionego lemmatu, punkt c zawarty w (a, b) i taki, że:

$$\omega[F; (a, b)] \leqslant |F(b) - F(c)| + |F(c) - F(a)|.$$

Ponieważ jednak każdy z przedziałów (a, c) i (c, b) zawiera przynajmniej jeden punkt zbioru E, więc:

$$(1) \qquad V^* \leqslant V'.$$

Z drugiej strony, jeżeli przedział (α, β) zawiera wewnątrz jakiś punkt γ zbioru E i zawarty jest między jego kresami, wówczas istnieją dwa punkty zbioru E, α' i β', takie, że: $\alpha' < \alpha < \gamma < \beta < \beta'$ [1]) i wówczas:

$$|F(\beta) - F(\alpha)| \leqslant \omega[F; (\alpha', \gamma)] + \omega[F; (\gamma, \beta')];$$

Stąd:

$$(2) \qquad V' \leqslant 2\,V^*,$$

czyli:

$$V^* \leqslant V' \leqslant 2\,V^*,$$

co dowodzi, że V^* i V' są równocześnie skończone.

Nie są jednak naogół równe. Jeżeli np. $F(x) = \sin x$, zaś zbiór E składa się z punktów: 0, π, 2π, wówczas:

$$V^* = 2, \quad \text{zaś} \quad V' = 4.$$

Zmienimy odpowiednio określenie bezwzględnej ciągłości na zbiorze.

Będziemy mówili, że funkcja $F(x)$ jest *bezwzględnie ciągła na zbiorze* E, jeżeli dla każdego układu skończonego przedziałów (a_i, b_i), niezachodzących na siebie, zawierających punkty zbioru E i zawartych między jego kresami, nierówność:

$$\Sigma(b_i - a_i) < \eta$$

pociąga za sobą nierówność:

$$\sum_i |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon \,{}^{2)},$$

dla dowolnego ε przy dostatecznie małem η.

---

[1]) Gdyby γ był krańcem (α, β), przyjęlibyśmy: $\alpha' = \gamma = \alpha$, względnie: $\beta' = \gamma = \beta$.

[2]) W określeniu tem można zastąpić: $\sum_i |F(b_i) - F(a_i)|$ przez: $|\sum_i [F(b_i) - F(a_i)]|$. Zachowujemy jednak pierwszą nierówność ze względu na dogodność w dowodze-

Stwierdzimy równoważność tego określenia z określeniem Chinczina, przynajmniej dla funkcyj ciągłych.

Istotnie, jeżeli krańce przedziału (a, b) należą do zbioru E, to istnieje w tym przedziale punkt c taki, że:

$$\omega[F; (a, b)] \leqslant |F(b) - F(c)| + |F(c) - F(a)|.$$

Wynika stąd, że, jeżeli dla dowolnego układu skończonego przedziałów (c_i, d_i) niezachodzących na siebie, zawierających punkty zbioru E. nierówność:

$$\sum_i (d_i - c_i) < \eta$$

pociąga za sobą:

$$\sum_i |F(d_i) - F(c_i)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

to, dla dowolnego układu przedziałów (a_j, b_j), niezachodzących na siebie, o krańcach należących do zbioru E, nierówność:

$$\sum_j (b_j - a_j) < \eta$$

pociąga za sobą:

$$\sum_j \omega[F; (a_j, b_j)] < \varepsilon,$$

czyli funkcja bezwzględnie ciągła według nowego określenia jest bezwzględnie ciągła w znaczeniu określenia 2°.

Przypuśćmy teraz, że $F(x)$ jest na zbiorze E bezwzględnie ciągła w znaczeniu określenia 2°. Ze względu na ciągłość $F(x)$, można założyć że zbiór E jest domknięty.

Niech $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ będzie ciągiem przedziałów przyległych do zbioru E. Poczynając od pewnego N, mamy:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \omega[F; I_n] < \frac{\varepsilon}{6}\cdot$$

Pozostaje skończona ilość przedziałów $I_1, I_2, \ldots, I_N$. Ze względu na ciągłość $F(x)$, można dobrać liczbę η_1 tak, że dla każdego przedziału $I \subset I_k\ (k < N)$ nierówność:

$$|I| < \eta_1$$

---

niach. Określenie wyżej podane tem się tylko różni od równoważnego mu określenia Łuzina, że $|F(b_i) - F(a_i)|$ zajmuje miejsce wahania funkcji F w przedziale (a_i, b_i), (por. Comptes Rendus t. 155, p. 1476).

pociąga za sobą nierówność:

$$\omega[F; I] < \frac{\varepsilon}{6N}.$$

Niech teraz (a_i, b_i) tworzą układ skończony, nie zachodzą na siebie, zawierają punkty zbioru E i zawarte będą między jego kresami. Przypuśćmy, że J_i jest największym przedziałem, zawartym w (a_i, b_i), o krańcach należących do E. Jeżeli $\sum_i |J_i| < \eta_2$, to, przy dostatecznie małem η_2, mielibyśmy:

$$\sum_i \omega[F, J_i] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Prócz przedziału J_i przedział (a_i, b_i) zawiera conajwyżej dwa podprzedziały, leżące już całkowicie w przedziałach przyległych do E.

Niech teraz η oznacza mniejszą z liczb η_1 i η_2; gdy tylko:

$$\sum_i (b_i - a_i) < \eta$$

wówczas:

$$\sum_i |F(b_i) - F(a_i)| \leqslant \sum_i \omega[F; (a_i, b_i)] < \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{6} + 2N\frac{\varepsilon}{6N} = \varepsilon,$$

zatem:

$$\sum_i |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon,$$

czyli $F(x)$ jest bezwzględnie ciągła na E według nowej definicji.

Obie definicje są zatem równoważne.

§ 2. Zmienionym w ten sposób określeniom wahania na zbiorze i bezwzględnej ciągłości na zbiorze linjowym odpowiadają następujące określenia dla funkcji dwóch zmiennych.

Ograniczymy się do funkcji ciągłych $F(x, y)$. Prostokątem R nazywać będziemy zbiór: $a \leqslant x \leqslant b$; $c \leqslant y \leqslant d$. Niech $F(R) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$, a więc niech oznacza dowolną funkcję ciągłą i dodawalną prostokąta R. Będziemy oznaczali przez R_E najmniejszy prostokąt, zawierający zbiór E.

1. Będziemy mówili, że funkcja $F(R)$ jest o *wahaniu skończonem na zbiorze* E, jeżeli żbieżny jest każdy szereg:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |F(R_i)|,$$

gdy prostokąty R_i są zawarte w prostokącie R_E, nie zachodzą na siebie i zawierają punkty zbioru E.

Będziemy mówili, że funkcja prostokąta $F(R)$ jest *bezwzględnie ciągła na zbiorze* E, jeżeli dla każdego układu prostokątów $\{R_i\}$, zawartych w prostokącie R_E, niezachodzących na siebie i zawierających punkty zbioru E, nierówność: $\sum_i |R_i| < \eta$ pociąga za sobą, dla dostatecznie małego η: $\sum_i |F(R_i)| < \varepsilon$, gdzie ε jest dowolną liczbą dodatnią.

§ 3. Przytoczone zostaną teraz twierdzenia, dotyczące własności funkcyj o wahaniu skończonem na zbiorze i bezwzględnie ciągłych na zbiorze, z których trzy ostatnie dowodzą się w sposób podobny, jak ich odpowiedniki w zakresie funkcyj jednej zmiennej.

Twierdzenie I. *Funkcja bezwzględnie ciągła na zbiorze jest na nim o wahaniu skończonem.*

Dowód. Gdyby funkcja $F(R)$, bezwzględnie ciągła na zbiorze E, nie była na nim o wahaniu skończonem, moglibyśmy utworzyć ciąg prostokątów rozłącznych $\{R_i\}$, zawierających punkty zbioru E i zawartych w prostokącie ograniczającym E tak, by szereg $\sum_{i=1}^{\infty} |F(R_i)|$ był rozbieżny. Szereg ten posiada resztę $\sum_{i=N}^{\infty} |F(R_i)| = \infty$. Można N dobrać tak, by: $\sum_{i=N}^{\infty} |R_i| < \eta$, gdzie η jest dowolnie małe. Jest to sprzeczne jednak z bezwzględną ciągłością funkcji $F(R)$ na zbiorze E.

Twierdzenie II. *Jeżeli funkcja jest o wahaniu skończonem (bezwzględnie ciągła) na pewnym zbiorze, to jest o wahaniu skończonem (bezwzylędnie ciągła) na każdym jego podzbiorze.*

Twierdzenie III. *Kombinacja linjowa funkcyj o wahaniu skończonem (bezwzględnie ciągłych) na pewnym zbiorze są o wahaniu skończonem (bezwzględnie ciągłe) na tym zbiorze.*

Twierdzenie IV. *Funkcja o wahaniu skończonem (bezwzględnie ciągła) na pewnym zbiorze jest o wahaniu skończonem (bezwzględnie ciągła) na jego domknięciu*[1].

Ze względu na ostatnie twierdzenie można zawsze zakładać, że zbiór, na którym funkcja jest o wahaniu skończonem, lub bezwzględnie ciągła, jest zbiorem domkniętym.

---

[1]) Zakładamy wciąż, że funkcje prostokąta są ciągłe, t. j. zmierzają do zera wraz z miarą przedziału.

§ 4. Wyróżniona zostanie teraz pewna klasa specjalna funkcyj o wahaniu skończonem na zbiorze, do której się przeważnie będziemy ograniczali, klasa funkcyj o przyroście określonym na zbiorze. Klasa ta w zakresie funkcyj prostokąta nie pokrywa się z klasą funkcyj o wahaniu skończonem na zbiorze.

Będziemy mówili, że funkcja $F(R)$ *posiada na zbiorze domkniętym* E_0 *przyrost określony*, jeżeli dla każdego podzbioru domkniętego $E \subset E_0$ tego zbioru istnieje liczba A_E taka, że dla dowolnego układu prostokątów rozłącznych $R_1, R_2, \ldots, R_n$, pokrywających zbiór E i zawartych w prostokącie R_E, nierówność:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} R_i - E \right| < \eta$$

pociąga za sobą nierówność:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} F(R_i) - A_E \right| < \varepsilon$$

przy dostatecznie małem η.

Liczba A_E jest właśnie przyrostem $F(R)$ na zbiorze E; liczba A_{E_0}, odpowiadająca zbiorowi E_0, jest przyrostem $F(R)$ na E_0.

§ 5. Funkcję $F(R)$ będziemy nazwali *o wahaniu skończonem uogólnionem w prostokącie* R_0, jeżeli ten prostokąt jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów, na których $F(R)$ jest o wahaniu skończonem i posiada przyrost określony. Będziemy ją nazywali *bezwzględnie ciągłą uogólnioną w* R_0, jeżeli jest on sumą przeliczalnej ilości zbiorów, na których $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła i o przyroście określonym.

Funkcje o wahaniu skończonem uogólnionem będziemy w skróceniu oznaczali VBG', zaś bezwzględnie ciągłe uogólnione ACG'[1]).

Z określeń funkcyj VBG' i ACG' wynikają natychmiast:

T w i e r d z e n i e I. *Funkcja* ACG' *w prostokącie* R *jest w nim* VBG'.

T w i e r d z e n i e II. *Funkcja* VBG' (*wzgl.* ACG') *w pewnym prostokącie jest* VBG' (*wzgl.* ACG') *w każdym, zawartym w nim, prostokącie.*

T w i e r d z e n i e III. *Kombinacja linjowa funkcyj* VBG', (*wzgl.* ACG') *są funkcjami* VBG' (*wzgl.* ACG').

---

[1]) Skróty te pochodzą od nazw francuskich: „Fonctions à variation bornée généralisée, fonctions absolument continues généralisées“.

Twierdzenie IV. *Jeżeli funkcja $F(R)$, ciągła w prostokącie R_0, jest VBG' (wzgl. ACG') w każdym z prostokątów R_1 i R_2 takich, że $R_0 = R_1 + R_2$, wówczas jest VBG' (wzgl. ACG') w prostokącie R_0.*

§ 6. Przyjęte określenia funkcyj VBG' i ACG' ustalone są przez analogję do definicyj Chinczina [1]). Lecz bardzo często będziemy się posługiwali definicjami funkcyj VBG' i ACG', analogicznemi do definicyj Denjoy-Łuzina [2]) w zakresie funkcyj jednej zmiennej. Zostaną one sformułowane w poniższem twierdzeniu, które zarazem konstatuje ich równoważność z przyjętemi przez nas poprzednio określeniami, a którego dowód niczem się nie różni od dowodu równoważności definicyj Chinczina i Łuzina [3]).

Twierdzenie I. *Na to, aby funkcja $F(R)$ była w prostokącie R_0 VBG', (wzgl. ACG') trzeba i wystarcza, by każdy zbiór domknięty, zawarty w R_0 posiadał kawałek [4]), na którym $F(R)$ jest o wahaniu skończonem (wzgl. bezwzględnie ciągła) i posiada przyrost określony.*

Podobnież może być udowodnione twierdzenie, dotyczące nieco szerszej klasy funkcyj, które okaże się bardzo pożyteczne w wypadkach, gdy będziemy się posługiwali obu definicjami funkcyj VBG' i ACG' jednocześnie.

Twierdzenie II. *Na to, by zbiór domknięty E_0 był sumą przeliczalnej ilości zbiorów domkniętych, na których funkcja $F(R)$ jest o wahaniu skończonem (bezwzględnie ciągła) trzeba i wystarcza, by każdy zbiór domknięty $E \subset E_0$ posiadał kawałek, na którym $F(R)$ jest o wahaniu skończonem (bezwzględnie ciągła).*

II. Pochodne funkcyj uogólnionych bezwzględnie ciągłych.

§ 7. Część druga niniejszej pracy będzie dotyczyła pochodnych funkcyj ACG'. Przyjmiemy określenia pochodnych, któremi się posługiwali pp. Banach i Saks w swych pracach i które nazwiemy pochodnemi Banacha [5]).

---

[1]) Comptes Rendus, t. 162 (1916), p. 287.

[2]) A. Denjoy. Sur la totalisation des nombres derivés non sommables. Annales de l'Ecole Normale Sup. t. 33 (1916), p. 127. Łuzin. C. R. t. 284 (1912), p. 1475.

[3]) S. Saks. Théorie de l'intégrale, p. 164.

[4]) Przez kawałek zbioru domkniętego płaskiego rozumiemy jego podzbiór, zawarty wewnątrz prostokąta, wyznaczającego ten kawałek, wraz z punktami skupienia tych punktów wewnętrznych, leżącemi na bokach prostokąta. Por. H. Looman. Sur la totalisation. § 2. Str. 248.

[5]) W zagadnieniach tych moglibyśmy zastąpić pochodną Banacha przez

Pochodną górną $\overline{F}(x,y)$ funkcji $F(R)$ w punkcie (x,y) określimy jako:

$$\overline{F}(x,y)=\overline{\lim_{|K|\to 0}}\frac{F(K)}{|K|},$$

gdzie K jest kwadratem, zawierającym punkt (x,y) a $|K|$ oznacza miarę K.

Podobnież określamy *pochodną dolną*:

$$\underline{F}(x,y)=\underline{\lim_{|K|\to 0}}\frac{F(K)}{|K|}.$$

Funkcja $F(R)$ jest w punkcie (x,y) różniczkowalna według Banacha, jeżeli $\overline{F}(x,y)=\underline{F}(x,y)$ i obie te pochodne są skończone; ich wspólną wartość nazywamy wówczas pochodną funkcji $F(R)$ w punkcie (x,y).

§ 8. Rozważania niniejszego paragrafu mają doprowadzić do pewnego rozkładu funkcji o wahaniu skończonem lub bezwzględnie ciągłej na zbiorze, posiadającej na nim przyrost określony. Rozkład ten pozwoli, w związku z lemmatem podstawowym, udowodnionym w następnym paragrafie, stwierdzić różniczkowalność prawie wszędzie funkcyj ACG'.

Każdemu zbiorowi domkniętemu E odpowiada w prostokącie R pewien układ $D(E,R)$ utworzony z prostokątów, nie zawierających wewnątrz punktów zbioru E[1]). W celu uzyskania takiego układu, podzielmy podstawę prostokąta R, zawierającego pewien kawałek zbioru E na pewną ilość części; prowadząc przez punkty podziału równoległe do wysokości[2]), potniemy prostokąt na pasma. Każde z tych pasm zaliczamy do układu $D(E,R)$, jeżeli nie zawiera wewnątrz punktów zbioru E. Jeżeli je zawiera, wydzielamy zeń prostokąty, nie zawierające punktów zbioru E wewnątrz, o wysokości niemniejszej od podstawy. Ilość tych prostokątów będzie skończona; zaliczamy je również do układu $D(E,R)$.

Zagęszczając następnie punkty podziału podstawy prostokąta

---

t. zn. pochodną regularną, której określenie uzyskujemy, zastępując w definicji Lebesgue'a zbiór przez prostokąt (H. Lebesgue. Sur l'intégration des fonctions discontinues. Annales de l'École Norm. Sup. 27 (1911), p. 388). Pochodną Banacha przyjmiemy dla ustalenia uwagi.

[1]) Pomysł tworzenia tych układów zawdzięczamy Loomanowi. l. c. 8 p. 254.

[2]) T. j. do osi y.

i stosując ten sam proces wyboru, wprowadzamy coraz to nowe prostokąty do układu $D(E, R)$.

Przez powtarzanie tego podziału tak, by największa z odległości między punktami podziału podstawy prostokąta R zmierzała do zera, powstaje ciąg prostokątów $r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots$, nie zachodzących na siebie i nie zawierających wewnątrz punktów zbioru E; prostokąty te tworzą układ $D(E, R)$, przyczem łączna jego miara, t. j. suma $\sum_{i=1}^{\infty} |r_i|$ równa jest mierze dopełnienia E do R. Układ taki będziemy nazywali *układem wyczerpującym dopełnienie* zbioru E do prostokąta R i będziemy oznaczali go przez $D(E, R)$, jeżeli się nie będziemy obawiali wieloznaczności.

Sumę szeregu:

$$\sum_{i=1}^{\infty} F(r_i),$$

jeżeli jest on bezwzględnie zbieżny i wartość tej sumy nie zależy od sposobu tworzenia układu $D(E, R)$, będziemy nazywali *przyrostem* $F(R)$ *na dopełnieniu* E *do* R.

Lemmat I. Jeżeli funkcja $F(R)$ posiada na zbiorze E przyrost określony, wówczas posiada również przyrost określony na dopełnieniu E do każdego prostokąta R, zawartego w prostokącie, ograniczającym zbiór E, t. j. suma szeregu $\sum_{i=1}^{\infty} F(r_i)$ nie zależy od sposobu tworzenia układu, wyczerpującego dopełnienie E do R.

Dowód. Można dobrać tak duże N, by:

$$\sum_{i=1}^{N} |r_i| > |D(E, R)| - \eta = |R - E| - \eta.$$

Zostaje w R układ skończony prostokątów $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m, \ldots$ przyczem:

$$\left| \sum_{j=1}^{m} \varrho_j - E \cdot R \right| < \eta;$$

lecz nierówność ta pociąga za sobą nierówność:

$$\left| \sum_{j=1}^{m} F(\varrho_j) - A_{E \cdot R} \right| < \varepsilon,$$

przy dowolnem $\varepsilon > 0$, byleby η było dostatecznie małe ($A_{E \cdot R}$ jest przyrostem $F(R)$ na zbiorze $E \cdot R$).

Ponieważ:

$$F(R) = \sum_{i=1}^{N} F(r_i) + \sum_{i=1}^{m} F(\varrho_j),$$

to:

$$\left| F(R) - \sum_{i=1}^{N} F(r_i) - A_{E \cdot R} \right| = \left| \sum_{j=1}^{m} F(\varrho_j) - A_{E \cdot R} \right| < \varepsilon.$$

A więc:

$$\lim_{N \gg \infty} \sum_{i=1}^{N} F(r_i) = F(R) - A_{E \cdot R}$$

i otrzymujemy rozkład:

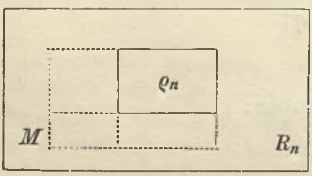
$$(1) \qquad F(R) = \sum_{i=1}^{\infty} F(r_i) + A_{E \cdot R}.$$

Jeżeli chodzi o wyzyskanie bezwzględnej ciągłości funkcji na zbiorze E lub skończoności wahania, można prostokąty układu wyczerpującego dobierać w ten sposób, by zawierały punkty tego zbioru na obwodzie. Wystarczy przy tworzeniu go wydzielić wszystkie pasma dotykające zbiór, t. j. posiadające jego punkty na obwodzie i zaliczyć je do układu.

Niech teraz $\Omega(F, R)$ będzie oscylacją $F(R)$ na R. Udowodnimy następujący:

Lemmat II. *Jeżeli funkcja $F(R)$ jest o wahaniu skończonem na zbiorze E, zaś $R_1, R_2, \ldots, R_n$ jest dowolnym układem prostokątów, zawierających punkty zbioru E i zawartych w prostokącie R_E, ograniczającym zbiór E, wówczas zbieżny jest szereg:* $\sum_{n=1}^{\infty} \Omega(F, R_n)$.

Dowód. Ze względu na ciągłość $F(R)$, istnieje taki prostokąt $\varrho_n \subset R_n$, że $|F(\varrho_n)| = \Omega(F, R)$. Prostokąt R_n zawiera przynajmniej



jeden punkt zbioru E, wewnątrz, lub na obwodzie. Jeżeli ϱ_n nie zawiera punktów zbioru E, można zbudować cztery najwyżej prostokąty $R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, R_n^{(3)}, R_n^{(4)}$ o wierzchołku $M \epsilon E$ takie, że

$$F(\varrho_n) = F(R_n^{(1)}) - F(R_n^{(2)}) - F(R_n^{(3)}) + F(R_n^{(4)}).$$

Zatem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Omega(F, R_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |F(R_n^{(1)}) - F(R_n^{(2)}) - F(R_n^{(3)}) + F(R_n^{(4)})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} [|F(R_n^{(1)})| + |F(R_n^{(2)})| + |F(R_n^{(3)})| + |F(R_n^{(4)})|]$$

i lemmat jest udowodniony.

Wynika stąd, że, jeżeli funkcja ciągła $F(R)$ jest o wahaniu skończonem na zbiorze E i posiada na nim przyrost określony, wówczas posiada także określony przyrost na jego dopełnieniu do każdego prostokąta $R \subset R_E$ i przyrost ten jest funkcją addytywną prostokąta R.

Przyrost funkcji $F(R)$ na dopełnieniu zbioru do prostokąta R będziemy oznaczali $\Psi(F; R)$, lub wprost $\Psi(R)$, jeżeli nie wyniknie stąd żadna wieloznaczność.

Funkcja $\Psi(R)$ jest funkcją ciągłą prostokąta R. Jeżeli bowiem $R \subset R_E$, zaś $\{r_i\}$ jest dowolnym układem prostokątów, dotykających zbiór E i wyczerpujących dopełnienie E do R_E, wówczas, zaczynając od dostatecznie wielkiego $i = I$ mamy nierówność:

$$\sum_{i=I}^{\infty} |F(r_i \cdot R)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \Omega(r_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z drugiej strony, ze względu na ciągłość $F(R)$, przy dostatecznie małem η będziemy mieli, dla $|R| < \eta$ oraz $i < I$, nierówność:

$$|F(r_i \cdot R)| < \frac{\varepsilon}{2I};$$

zatem:

$$\sum_{i=1}^{I} |F(r_i \cdot R)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

skąd, ze względu na (2), wynika: $|\Psi(R)| < \varepsilon$ dla $|R| < \eta$.

Funkcja $\Psi(R)$ jest o wahaniu skończonem na zbiorze E wraz z funkcją $F(R)$, jeżeli przytem $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła na E, wówczas i $\Psi(R)$ jest bezwzględnie ciągła na E. Istotnie, mając dowolny układ $\{R_i\}$ prostokątów, zawierających punkty zbioru E i zawartych w prostokącie, ograniczającym ten zbiór, można wyczerpać dopełnienie zbioru E do każdego z nich przez prostokąty, dotykające zbiór E.

Funkcja addytywna:

$$\Phi(R) = A_{E \cdot R}$$

jest przyrostem funkcji $F(R)$ na zbiorze E.

Ze względu na (1), mamy rozkład:

$$F(R) = \Phi(R) + \Psi(R).$$

Funkcja $\Phi(R)$ jest ciągła, jest przytem o wahaniu skończonem w prostokącie, ograniczającym zbiór E; jest ponadto bezwzględnie ciągła w tym prostokącie, jeżeli $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła na E. W rzeczy samej, jako różnica dwóch funkcyj o wahaniu skończonem (bezwzględnie ciągłych) na E, jest o wahaniu skończonem (bezwzględnie ciągła) na E, oraz znika na prostokątach, nie zawierających punktów zbioru E.

Z rozważań powyższych wynika:

T w i e r d z e n i e. *Funkcja ciągła $F(R)$, o wahaniu skończonem (bezwzględnie ciągła) na zbiorze domkniętym E i posiadająca na nim przyrost określony, jest w prostokącie, ograniczającym ten zbiór, sumą swego przyrostu na zbiorze E, $\Phi(R)$ i przyrostu $\Psi(R)$ na jego dopełnieniu, czyli:*

$$F(R) = \Phi(R) + \Psi(R),$$

przyczem funkcja $\Psi(R)$ jest funkcją ciągłą o wahaniu skończonem (bezwzględnie ciągłą) na zbiorze E, zaś funkcja $\Phi(R)$ jest o wahaniu skończonem (bezwzględnie ciągła) w prostokącie, ograniczającym ten zbiór.

§ 9. L e m m a t I. *Jeżeli punkt M jest punktem gęstości zbioru domkniętego P, wówczas dla każdego kwadratu K, zawierającego punkt M, nierówność $|K| < \delta$ pociąga za sobą, przy dostatecznie małem δ:*

$$|D(P; K)| < \eta \, |K|,$$

gdzie η jest dowolnie małą liczbą dodatnią.

Z uwagi na to, że zbiór $P \cdot D(P, K)$ jest miary zero, lemmat ten jest natychmiastową konsekwencją określenia punktu gęstości.

L e m m a t II. *Pochodna przyrostu na dopełnieniu zbioru domkniętego P funkcji $F(R)$ bezwzględnie ciągłej na tym zbiorze i posiadającej na nim przyrost określony, jest prawie wszędzie na tym zbiorze równa zeru.*

D o w ó d. Przypuśćmy, że zbiór $Q \subset P$ składa się z punktów, w których pochodna przyrostu $\Psi(R)$ funkcji $F(R)$ na dopełnieniu P nie jest zerem, będących zarazem punktami gęstości zbioru P. Lem-

mat byłby udowodniony, gdyby zbiór Q był miary zero. Przypuśćmy więc, że zbiór Q jest miary dodatniej.

Utwórzmy ciąg liczb: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m, \ldots$, zmierzających do zera i oznaczmy przez Q_m podzbiór zbioru P taki, że istnieją kwadraty, zawierające punkty tego zbioru, spełniające, co do miary, nierówność:

$$|K| < \delta,$$

przy dowolnem δ, na których:

$$|\Psi(K)| \geqslant \varepsilon_m |K|,$$

zaś przez E_m zbiór na którym:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |F(r_i)| \geqslant \varepsilon_m |K|,$$

gdzie układ prostokątów $\{r_i\}$ wyczerpuje dopełnienie zbioru P do kwadratu K.

Ponieważ:

$$|\Psi(K)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |F(r_i)|,$$

przeto $Q_m \subset E_m$ przy każdem m. Lecz $Q = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m$, istnieją więc takie m_0, że:

$$|Q_{m_0}| \neq 0,$$

a więc *a fortiori*:

$$|E_{m_0}| \neq 0.$$

Oznaczmy dla skrócenia sumę $\sum_{i=1}^{\infty} |F(r_i)|$ przez $\Delta[|F|; D(P,K)]$ i weźmy pod uwagę rodzinę kwadratów $\bar{K}$ takich, że, jakkolwiek:

$$(2) \qquad |D(P; \bar{K})| < \eta' |\bar{K}|,$$

to jednak:

$$(3) \qquad \Delta[|F|; D(P; \bar{K})] \geqslant \varepsilon_{m_0} |\bar{K}|.$$

Ze względu na określenie zbioru E_{m_0} i na lemmat wstępny (I), rodzina ta pokrywa zbiór E_{m_0} w sensie Vitali'ego, przeto można z niej wyjąć ciąg kwadratów rozłącznych takich, że:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\bar{K}_j| = |E_{m_0}|.$$

Do każdego η można dobrać η' tak, że: $\eta'|E_{m_0}|=\eta$, a więc:

$$\eta' \sum_{j=1}^{\infty} |\bar{K}_j| = \eta.$$

Wówczas jednak, ze względu na (3):

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Delta[|F|; D(P; \bar{K}_j)] \geqslant \varepsilon_{m_0} \sum_{j=1}^{\infty} |\bar{K}_j| = \varepsilon_{m_0} |E_{m_0}|,$$

chociaż, ze względu na (2):

$$\sum_{j=1}^{\infty} |D(P; K_j)] < \eta,$$

przy dowolnie małem η.

Jest to jednak sprzeczne z założeniem, że $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła na P. Zatem $|E_{m_0}|=0$, a więc i $|Q_{m_0}|=0$, skąd $|Q|=0$.

Lemmat jest udowodniony.

Opierając się na powyższym lemmacie, udowodnimy z łatwością następujące

Twierdzenie I. *Funkcja $F(R)$ bezwzględnie ciągła na zbiorze domkniętym P i posiadająca na nim przyrost określony, jest na nim prawie wszędzie rożniczkowalna.*

Istotnie, ponieważ $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła na zbiorze domkniętym i posiada na nim przyrost określony, mamy rozkład:

$$F(R) = \Phi(R) + \Psi(R),$$

gdzie $\Phi(R)$ jest bezwzględnie ciągła w prostokącie, ograniczającym zbiór P, a więc jest prawie wszędzie w nim różniczkowalna, pochodną zaś $\Psi(R)$ jest, prawie wszędzie na zbiorze P, zero. Zatem prawie wszędzie na P:

$$F'(x,y) = \Phi'(x,y) + \Psi'(x,y) = \Phi'(x,y).$$

Z twierdzenia powyższego wynika natychmiast

Twierdzenie II. *Funkcja $F(R)$, ACG' w prostokącie R_0, jest prawie wszędzie różniczkowalna w tym prostokącie.*

§ 10. W § 9 stwierdziliśmy różniczkowalność prawie wszędzie funkcji ACG'. Teraz zobaczymy, że, jeżeli ponadto jej pochodna w znaczeniu Banacha zachowuje znak stały prawie wszędzie, wów-

czas funkcja ta jest funkcją monotoniczną. Dowód tego twierdzenia będzie oparty na lemmacie następującym:

Lemmat. *Jeżeli funkcja* $F(R)$ *skończona w prostokącie* R_0 *ma w tym prostokącie prawie wszędzie pochodną dolną* $\underline{F}(x, y)$ *nieujemną, oraz jest bezwzględnie ciągła na zbiorze (miary zero)* Q, *na którym* $\underline{F}(x, y) < 0$, *wówczas* $F(R)$ *jest w* R_0 *stale nieujemna.*

Dowód. Niech R' będzie dowolnym prostokątem, zawartym w R_0. Rodzina kwadratów $\overline{K}$ takich, że $F(\overline{K}) \geqslant 0$ pokrywa dopełnienie zbioru Q do R' w sensie Vitali'ego, przeto można utworzyć układ skończony prostokątów $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \ldots, \overline{R}_n, \ldots$ taki, że:

(1) $$\sum_{i=1}^{n} |\overline{R}_i| \geqslant R' - |Q| - \eta = |R'| - \eta,$$

przyczem na każdym z nich $F(\overline{R}_i) \geqslant 0$.

Pozostaje w R' układ skończony $\{r_j\}$ prostokątów, z których każdy zawiera punkty zbioru Q, jeżeliby bowiem który z nich nie zawierał punktów zbioru Q, $F(R)$ byłaby na nim nieujemna [1]) i zaliczylibyśmy go do układu $\{\overline{R}_i\}$.

Ze względu na (1), mamy:

(2) $$\sum_{j=1}^{m} |r_j| < \eta$$

Otóż można w (1) dobrać η tak, by nierówność (2) pociągała za sobą:

(3) $$\sum_{j=1}^{m} |F(r_j)| < \varepsilon.$$

Stąd:

$$F(R') = \sum_{i=1}^{n} F(\overline{R}_i) + \sum_{j=1}^{m} F(r_j) > -\varepsilon,$$

a więc, ze względu na dowolność ε:

$$F(R') \geqslant 0.$$

Lemmat jest więc udowodniony.

---

[1]) por. S. Saks. Théorie de l'intégrale. Chapitre VII, § 2, Th. 1, str. 127.

T w i e r d z e n i e I. *Na to, aby funkcja $F(R)$, będąca ACG' w prostokącie R_0, była w nim stale nieujemna, trzeba i wystarcza, by prawie wszędzie jej pochodna była nieujemna.*

Konieczność warunku jest oczywista, pozostaje wykazać jego wystarczalność.

Niech $F(R)$ będzie funkcją ACG' w prostokącie R_0. Oznaczmy przez E zbiór punktów, w otoczeniu których istnieją prostokąty R takie, że $F(R) < 0$. Zbiór ten jest domknięty, zawiera więc, na zasadzie twierdzenia I § 6, kawałek $\Pi(E; r_0)$ na którym $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła. Przypuśćmy teraz, że r jest dowolnym prostokątem, zawartym w r_0. Funkcja $F(R)$ jest bezwzględnia ciągła na zbiorze $Q \subset \Pi(E, r_0)$, poza którym jej pochodna dolna $\underline{F}(x, y)$ jest w r_0 nieujemna.

Na zasadzie udowodnionego lemmatu, $F(r) \geqslant 0$ dla $r \subset r_0$, żaden więc punkt wewnętrzny kawałka $\Pi(E, r_0)$ nie posiada, w dostatecznie małem otoczeniu, prostokątów, na których $F(R)$ byłaby ujemna, co sprzeczne jest z określeniem zbioru E. Zbiór ten jest więc zbiorem pustym; twierdzenie zostało w ten sposób udowodnione.

Przez zmianę znaku funkcji $F(R)$ stwierdzamy, że funkcja ACG' jest stale niedodatnia wówczas i tylko wówczas, gdy jej pochodna jest prawie wszędzie niedodatnia.

Stąd:

T w i e r d z e n i e II. *Na to, by funkcja ACG' była tożsamościowo zerem w prostokącie R_0, trzeba i wystarcza, by jej pochodna była zerem prawie wszędzie w tym prostokącie.*

Wynika stąd natychmiast:

T w i e r d z e n i e III. *Funkcja ACG' osobliwa jest tożsamościowo zerem.*

Zatem mamy:

T w i e r d z e n i e IV. *Funkcja ACG' o wahaniu skończonem jest bezwzględnie ciągła.*

W szczególności fnnkcja ACG' monotoniczna jest bezwzględnie ciągła.

III. Całka podwójna D' (definicja opisowa).

§ 11. Na pojęciu funkcji prostokąta ACG' zostanie oparta definicja opisowa całki podwójnej D', która, w płaszczyźnie dwóch zmiennych, odpowiada całce szczególnej pojedyńczej Denjoy.

Funkcja $f(x, y)$ jest *całkowalna* D' w prostokącie R_0, jeżeli jest prawie wszędzie w tym prostokącie pochodną funkcji $F(R)$, ACG'. Funkcja $F(R)$ jest wówczas jej *całką nieoznaczoną* D'. Ze względu na twierdzenie II § 10, całka nieoznaczona jest jednoznacznie określona przez funkcję podcałkową.

Wartość funkcji $F(R)$ na prostokącie R_0 jest całką oznaczoną funkcji $f(x, y)$ w tym prostokącie i piszemy:

$$F(R_0) = D' \iint_{R_0} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Z określenia tego wynika, że funkcja całkowalna D' jest mierzalna i prawie wszędzie skończona.

Z twierdzeń § 5 wynikają następujące własności całki D':

1°. Funkcja całkowalna D' w każdym z prostokątów R_1 i R_2, mających bok wspólny, jest całkowalna w prostokącie $R_1 + R_2$, przyczem:

$$D' \iint_{R_1+R_2} f(x, y)\, dx\, dy = D' \iint_{R_1} f(x, y)\, dx\, dy + D' \iint_{R_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$

2°. Funkcja całkowalna D' w prostokącie R_0 jest całkowalna D' w każdym prostokącie $R \subset R_0$.

3°. Kombinacja linjowa funkcyj całkowalnych D' jest całkowalną D', przyczem:

$$D' \iint_{R} [\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y)]\, dx\, dy =$$

$$= \alpha \cdot \left(D' \iint_{R} f(x, y)\, dx\, dy \right) + \beta \cdot \left(D' \iint f(x, y)\, dx\, dy \right).$$

§ 12. Zajmiemy się teraz stosunkiem całki D' do całki Lebesgue'a. Mamy przedewszystkiem zupełnie oczywiste

Twierdzenie I. *Funkcja $f(x, y)$ sumowalna w prostokącie R_0 jest w tym prostokącie całkowalna D' i obie całki są równe.*

Twierdzenie II. *Funkcja $f(x, y)$ całkowalna D' w prostokącie R_0 i prawie wszędzie nieujemna w tym prostokącie jest w nim sumowalna.*

Istotnie, $f(x, y)$ jest w R_0 prawie wszędzie pochodną pewnej funkcji $F(R)$, ACG'. Na zasadzie twierdzenia I § 10, funkcja $F(R)$ jest stale nieujemna w R_0, czyli jest, ze względu na twierdzenie IV

tegoż paragrafu, bezwzględnie ciągła w R_0; zatem $f(x, y)$ jest jej całką nieoznaczoną Lebesgue'a.

§ 13. W związku z twierdzeniami § 12, narzuca się rozszerzenie twierdzenia o całkowaniu ciągów monotonicznych na całkę D'; dowód tego twierdzenia niczemby się nie różnił od dowodu analogicznego twierdzenia dla całki szczególnej Denjoy funkcyj jednej zmiennej.

Twierdzenie. *Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest granicą ciągu monotonicznego funkcyj $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_n(x, y), \ldots$ całkowalnych D', przyczem ciąg całek tych funkcyj jest ograniczony zgóry, wówczas $f(x, y)$ jest również całkowalna D', oraz:*

$$\lim_{n \to \infty} D' \int\int_R f_n(x, y)\, dx\, dy = D' \int\int_R f(x, y)\, dx\, dy.$$

IV. Operacje całkowe niewłaściwe w płaszczyźnie dwóch zmiennych. Definicja konstrukcyjna całki D'.

§ 14. Wprowadzone zostaną teraz pewne operacje całkowe niewłaściwe, otrzymane przez zwężenie operacyj stosowanych przez Loomana. Zauważymy przytem analogję między wprowadzonemi operacjami, a operacjami Cauchy'ego i Harnacka dla całek pojedyńczych.

Musimy w związku z niemi wprowadzić nowe pojęcie zbieżności szeregów bezwzględnych wartości funkcyj prostokąta.

Będziemy mówili, że szeregi $\sum_i F(R_i)$ wartości funkcji $F(R)$, odpowiadające ciągom $\{R_i\}$, utworzonym z prostokątów rozłącznych pewnej rodziny, są *zbieżne regularnie*, jeżeli do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\eta > 0$ tak, że nierówność:

$$\sum_{i=N}^{\infty} |R_i| < \eta$$

pociąga za sobą nierówność:

$$\sum_{i=N}^{\infty} |F(R_i)| < \varepsilon,$$

dla każgego ciągu $\{R_i\}$ prostokątów tej rodziny.

Przejdziemy teraz do określenia operacyj całkowych niewłaściwych w płaszczyźnie dwóch zmiennych.

Przypuśćmy, że operacja całkowa J przyporządkowuje funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ pewną funkcję ciągłą prostokąta na każdym prostokącie, zawartym w prostokącie R_0 i nie zawierającym wewnątrz, ani na obwodzie, punktów pewnego zbioru domkniętego P, przyczem istnieje funkcja ciągła w R_0, $F(R)$, równa całce J funkcji $f(x, y)$ na prostokątach, na których ta całka istnieje.

Poszczególne operacje niewłaściwe C i H przyporządkowują w prostokącie R_0 funkcji $f(x, y)$ funkcję $F(R)$, jako jej całkę niewłaściwą CJ, względnie HJ:

C, gdy zbiór P leży na obwodzie prostokąta R_0;

H, gdy funkcja $f(x, y)$ jest już całkowalna J w każdym prostokącie, nie zawierającym wewnątrz punktów zbioru P, oraz na samym zbiorze P[1]*, przyczem szeregi bezwzględnych wartości całek J na ciągach prostokątów dotykających*[2] *zbiór P, są zbieżne regularnie, oraz, dla $R \subset R_0$:*

$$F(R) = J\int\int_{P \cdot R} f(x, y)\,dx\,dy + \sum_{i=1}^{\infty} J\int\int_{r_i} f(x, y)\,dx\,dy,$$

gdzie układ $\{r_i\}$ jest układem prostokątów dotykających zbiór P, wyczerpującym dopełnienie P do R[3].

Operacja C jest podobna do operacji niewłaściwej Cauchy'ego dla całki pojedyńczej; odpowiada ona drugiej operacji Loomana. Operacja H jest podobna do operacji Harnack'a i odpowiada czwartej operacji Loomana.

Operację całkową J będziemy nazywali *zamkniętą*, jeżeli całki niewłaściwe CJ i HJ, powstałe z dokonania nad nią operacyj niewłaściwych C, względnie H, nie wykraczają poza jej zakres.

T w i e r d z e n i e. *Całka D' jest operacją całkową zamkniętą.*

Będziemy musieli pokolei wykazać, że całki niewłaściwe CD' i HD' nie wykraczają poza zakres całki D'.

Niech $f(x, y)$ będzie całkowalna D' w każdym prostokącie $R \subset R_0$, leżącym całkowicie wewnątrz tego prostokąta, przyczem w R_0 istnieje funkcja ciągła $F(R)$ równa całce D' funkcji $f(x, y)$

---

[1]) T. j. funkcja $\varphi(x, y)$ równa $f(x, y)$ na zbiorze P, zaś zeru na jego dopełnieniu, jest całkowalna w prostokącie R_0.

[2]) Mówimy, że prostokąt dotyka zbiór, jeżeli zawiera jego punkty na obwodzie, lecz nie zawiera ich wewnątrz.

[3]) Z powyższego wynika, że $F(R)$ nie zależy od układu $\{r_i\}$.

tam, gdzie ta całka istnieje. $F(R)$ jest ACG' w R_0, gdyż jest ACG' w każdym prostokącie, zawartym w R_0, zaś każda funkcja prostokąta jest bezwzględnie ciągła na odcinku prostej i posiada na nim przyrost określony; pochodną $F(R)$ jest prawie wszędzie w R_0 funkcja $f(x, y)$. Stąd $f(x, y)$ jest w R_0 całkowalna D' i całką jej na tym prostokącie jest $F(R_0)$. Pierwsza część twierdzenia została udowodniona.

Przypuśćmy teraz, że $f(x, y)$ jest całkowalna D' w prostokątach $R \subset R_0$, nie zawierających wewnątrz punktów pewnego zbioru P, na którym jest ona również całkowalna D', przyczem szeregi bezwzględnych wartości całek D' na prostokątach, dotykających zbiór P są zbieżne regularnie oraz, dla $R \subset R_0$:

$$F(R) = D' \int\int_{P \cdot R} f(x, y)\, dx\, dy + \sum_{i=1}^{\infty} D' \int\int_{r_i} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Oznaczmy:

$$F_1(R) = \sum_{i=1}^{\infty} D' \int\int_{r_i} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Ze względu na równość (1), funkcja $F_1(R)$ jest określona i ciągła w R_0. Jest ona bezwzględnie ciągła na P, z uwagi na regularną zbieżność szeregów bezwzględnych wartości całek D' funkcji $f(x, y)$ na ciągach prostokątów dotykających zbiór P. Przyrost jej na zbiorze P jest określony i równy tożsamościowo zeru. Istotnie, mając dowolny układ prostokątów $\{R_i\}$, zawierających punkty zbioru P, i zawartych w prostokącie, ograniczającym go, takich, że:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} R_i - P \right| < \eta,$$

utwórzmy w każdym z nich układ $\{r_j\}$ prostokątów dotykających zbiór P wyczerpujący dopełnienie P do R_i. Mamy wówczas:

$$\sum_{i=1}^{n} F_1(R_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} F_1(r_j).$$

oraz:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} |r_j| < \eta.$$

Ponieważ $F_1(R)$ jest bezwzględnie ciągła na P, można dobrać η tak, by:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}|F_1(r_j^i)| < \varepsilon;$$

wówczas *a fortiori*:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} F_1(R_i)\right| < \varepsilon,$$

czyli przyrost $F_1(R)$ na P jest zerem. $F_1(R)$ jest ACG' w R_0.

Będąc identyczna ze swym przyrostem na dopełnieniu P, posiada prawie wszędzie na P pochodną równą zeru. Jej pochodną na dopełnieniu P jest prawie wszędzie $f(x, y)$.

Załóżmy teraz:

$$F_2(R) = D' \int\int_{P \cdot R} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Pochodną tej funkcji jest prawie wszędzie na P funkcja $f(x, y)$, zaś prawie wszędzie na jego dopełnieniu — zero.

Zatem funkcja:

$$F(R) = F_1(R) + F_2(R)$$

jest w prostokącie R_0 funkcją ACG' i posiada w nim prawie wszędzie pochodną równą funkcji $f(x, y)$. Twierdzenie zostało całkowicie udowodnione.

§ 15. Stwierdzimy teraz, że pierwotne Loomana są całkami D' swych pochodnych.

Określenie pochodnych, przyjęte przez Loomana, jest następujące:

Pochodna górna:

$$\overline{D}F(x, y) = \overline{\lim_{|R| \to}} \frac{F(R)}{|R|},$$

gdzie R jest dowolnym prostokątem, zawierającym punkt (x, y); podobnież określa się *pochodną dolną* $\underline{D}F(x, y)$. Funkcja $F(R)$ posiada w punkcie (x, y) oznaczoną *pochodną mocną* Loomana, jeżeli $\overline{D}F(x, y) = \underline{D}F(x, y)$ i obie te pochodne są skończone. Pochodną tę oznaczymy przez $\overline{\underline{D}}F(x, y)$.

L e m m a t. *Jeżeli w każdym punkcie zbioru E pochodne $\overline{D}F(x, y)$ i $\underline{D}F(x, y)$ funkcji $F(R)$ są skończone, wówczas zbiór E jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów, na których $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła*

D o w ó d. Niech R_E będzie prostokątem, ograniczającym zbiór E. Weźmy pod uwagę zbiór E_n punktów, należących do zbioru E i takich, że dla prostokątów $R \subset R_E$, zawierających punkty zbioru E_n i mających boki co do długości mniejsze od $\frac{1}{n}$, zachodzi nierówność,

$$\frac{|F(R)|}{|R|} < n. \tag{1}$$

Podzielmy prostokąt R_E na prostokąty częściowe o bokach mniejszych od $\frac{1}{n}$; niech liczba ich będzie m_n. Przez E_n^i oznaczmy podzbiór zbioru E_n, zawarty w prostokącie częściowym $R_n^i (i=1,2,...,m)$. Ze względu na (1) i na skończoność pochodnych $\overline{D}F(x,y)$ i $\underline{D}F(x,y)$ na E będziemy mieli:

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_n} E_n^i.$$

Otóż na każdym ze zbiorów E_n^i funkcja $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła. Istotnie, niech układ $R_1, R_2, \ldots, R_p$ będzie układem prostokątów rozłącznych, zawierających punkty zbioru E_n^i i zawartych w R_n^i.

Ze względu na (1):

$$\sum_{j=1}^{p} |F(R_j)| < n \sum_{j=1}^{p} |R_j|,$$

skąd wynika bezwzględna ciągłość $F(R)$ na E_n^i.

Udowodnimy teraz:

T w i e r d z e n i e. *Funkcja $F(R)$, posiadająca w każdym punkcie prostokąta R_0 pochodną mocną Loomana $DF(x, y)$ określoną i skończoną, jest ACG' w R_0 i jest w nim całką D' swej pochodnej.*

Zgodnie z twierdzeniem II § 6 i z uwagi na udowodniony przed chwilą lemmat, każdy zbiór domknięty, zawarty w prostokącie R_0, w którym funkcja $F(R)$ jest pierwotną funkcji $f(x, y)$, posiada kawałek, na którym $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła. Lecz z drugiej strony, jak to stwierdził Looman[1]), każdy zbiór domknięty P,

---

[1]) Tę własność posiada, według Loomana, każdy zbiór t. zn. pierwszego rodzaju w sobie, którego każdy kawałek rzutuje się na oba boki prostokąta R_0, jako zbiór doskonały. Lecz każdy zbiór domknięty, który nie jest pierwszego rodzaju

i jest zawarty w R_0, posiada kawałek, na którym pochodna funkcji $F(R)$ jest sumowalna, oraz:

$$F(R) = \int\int_{P \cdot R} f(x, y)\, dx\, dy + \sum_{i=1}^{\infty} F(r_i),$$

gdzie układ $\{r_i\}$ wyczerpuje dopełnienie P do R. Powtarzając rozumowanie, stosowane już w paragrafie poprzednim, przekonamy się, że przyrost $F(R)$ na tym kawałku jest określony.

Zatem $F(R)$ jest funkcją ACG' w prostokącie R_0, zaś funkcja $f(x, y)$, będąc jej pochodną Loomana, jest zarazem jej pochodną Banacha, czyli $F(R)$ jest całką D' funkcji $f(x, y)$.

§ 16. Zanim przejdziemy do definicji konstruktywnej całki D', udowodnimy następujący lemmat:

L e m m a t. *Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest całkowalna D' w prostokącie R_0 i funkcja $F(R)$ jest jej całką nieoznaczoną D', wówczas każdy zbiór domknięty $P \subset R_0$ posiada kawałek $\Pi(P, R_0)$, na którym $f(x, y)$ jest sumowalna, przyczem szeregi całek D' na prostokątach, zawartych w prostokącie r_0 i dotykających zbiór P są zbieżne regularnie, oraz:*

$$F(R) = \int\int_{P \cdot R} f(x, y)\, dx\, dy + \sum_{i=1}^{\infty} F(r_i),$$

gdzie układ $\{r_i\}$ wyczerpuje dopełnienie zbioru P do R.

D o w ó d. Ponieważ całka D' funkcji $F(R)$ jest w R_0 funkcją ACG', przeto, na zasadzie twierdzenia I § 6, każdy zbiór domknięty P posiada w R_0 kawałek $\Pi(P, r_0)$, na którym $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła i posiada przyrost określony. Stąd natychmiast przekonywamy się o słuszności drugiej części lemmatu, uzyskujemy bowiem rozkład:

$$F(R) = \Phi(R) + \Psi(R),$$

gdzie $R \subset r_0$, przyczem $\Phi(R)$ jest bezwzględnie ciągła w r_0; ponieważ pochodną $\Phi(R)$ jest na $\Pi(P, r_0)$ prawie wszędzie funkcja $f(x, y)$, więc $f(x, y)$ jest sumowalna na $\Pi(P, r_0)$, oraz:

$$\Phi(R) = \int\int_{P \cdot R} f(x, y)\, dx\, dy,$$

---

w sobie, posiada kawałek t. zw. drugiego rodzaju, położony na przeliczalnej ilości prostych, równoległych do boków prostokąta, na którym przyrost funkcji bezwzględnie ciągłej jest, oczywiście, zerem (loc. cit. p. 275).

zaś:

$$\Psi(R) = \sum_{i=1}^{\infty} F(r_i),$$

zatem:

$$F(R) = \int\int_{P\cdot R} f(x, y)\, dx\, dy + \sum_{i=1}^{\infty} F(r_i).$$

Lemmat jest udowodniony.

Możnaby, opierając się na powyższym lemmacie, wykazać, że *całka D' jest najsłabszą operacją całkową, obejmującą całkę podwójną Lebesgue'a.* Analogiczne określenie całek pojedyńczych Denjoy zostało podane przez p. Saksa[1]) i dowód równoważności tego określenia z innemi określeniami, stosowany przez p. Saksa, przenosi się bez zasadniczych zmian na całkę D'.

§ 18. Podamy teraz definicję całki D' będącą analogonem definicji całek Denjoy, skonstruowanej niedawno przez P. Romanowskiego[2]):

Funkcja $f(x, y)$ jest w prostokącie R_0 całkowalna D', jeżeli istnieje funkcja $F(R)$ ciągła w prostokącie R_0, taka, że każdy zbiór domknięty P zawarty w R_0 posiada kawałek $\Pi(P, r_0)$, na którym $f(x, y)$ jest sumowalna, oraz zbieżne są regularnie szeregi bezwzględnych wartości funkcji $F(R)$ na ciągach prostokątów zawartych w r_0 i dotykających zbiór P, przyczem:

$$F(R) = \int\int_{P\cdot R} f(x, y)\, dx\, dy + \sum_{i=1}^{\infty} F(r_i), \tag{1}$$

gdzie układ $\{r_i\}$ wyczerpuje dopełnienie P do S.

Wykażemy, że określenie to jest równoważne definicji opisowej całki D', podanej w rozdziale poprzednim. Wystarczy wykazać, że na to, by funkcja $f(x, y)$ była w prostokącie R_0 całkowalna według nowego określenia, trzeba i wystarcza, by była w R_0 prawie wszędzie pochodną funkcji ACG'.

Ze względu na lemmat § 16, warunek jest konieczny. Z drugiej strony, jeżeli $f(x, y)$ jest całkowalna w R_0 według nowej definicji, to funkcja $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła na kawałku $\Pi(P, r_0)$

---

[1]) Fundamenta Math. t. X, p. 255.

[2]) P. Romanovski. Essai d'une exposition de l'intégrale de M. Denjoy sans nombres transfinis. Fund. Math. t. XIX, p. 38.

i posiada na nim przyrost określony, zatem, ze względu na twierdzenie I, § 6, jest ACG' w R_0. Oznaczmy teraz przez E zbiór punktów prostokąta R_0, w których $F'(x,y) \neq f(x,y)$. Gdyby zbiór E był miary dodatniej, zawierałby podzbiór domknięty Q miary dodatniej; ten skolei zawierałby kawałek $\Pi(Q,r_0')$ na którym $f(x,y)$ jest sumowalna i prawie wszędzie jest pochodną funkcji $F(R)$, co sprzeczne jest z określeniem zbioru Q. Zatem zbiór E jest zbiorem miary zero, a więc prawie wszędzie w R_0:

$$F'(x,y) = f(x,y).$$

§ 18. Przystępujemy do określenia całki D' przez proces pozaskończony. Wprowadzimy znakowanie następujące: będziemy oznaczali przez Q_J zbiór punktów osobliwości operacji całkowej J. Jeżeli operacje całkowe $J_1, J_2, \ldots, J_\omega, \ldots, J_\xi, (\xi < \alpha)$ tworzą ciąg pozaskończony, będziemu oznaczali przez $\sum\limits_{\xi<\alpha} J_\xi$ operację całkową, której zakres obejmuje zakresy poszczególnych operacyj ciągu. Będziemy ponadto oznaczali przez CJ całkę niewłaściwą, powstałą z całki J, przez zastosowanie do niej operacji C, przez HJ całkę, powstałą z całki J przez zastosowanie do niej operacji H, wreszcie przez HCJ wynik zastosowania obu tych operacji do całki J.

Otóż wykażemy, że można określić całkę D' w danym prostokącie jako:

$$D' = \sum_{\xi<\Omega} L_\xi,$$

przyczem L_ξ określamy przez indukcję:

$$L_\xi = HC[\sum_{\zeta<\xi} L_\zeta].$$

gdzie $L_1 = L$ (całka Lebesgue'a).

Otóż z jednej strony:

$$D' \supset \sum_{\xi<\Omega} L_\xi,$$

ponieważ D' jest operacją całkową zamkniętą.

Z drugiej strony, jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest całkowalna D', wówczas istnieje takie μ, że zbiór Q_{L_μ} jest zbiorem pustym. W rzeczy samej, gdyby żaden ze zbiorów Q_{L_ξ} nie był pusty, istniałby taki wskaźnik ν, że:

$$Q_{L_\nu} = Q_{L_{\nu+1}}. \tag{1}$$

Jeżeli zbiór Q_{L_ν} leży całkowicie na obwodzie prostokąta R_0, wówczas, po zastosowaniu operacji C, zbiór $Q_{CL_\nu} = Q_{L_{\nu+1}}$ jest pusty.

Jeżeli jednak zbiór Q_{L_ν} posiada punkty wewnątrz R_0, wówczas na zasadzie lemmatu § 17 posiada kawałek $\Pi(Q_{L_\nu}, r_0)$, na którym funkcja $f(x, y)$ jest sumowalna, zbieżne są regularnie szeregi bezwzględnych wartości całek CL_ν na prostokątach zawartych w r_0 i dotykających zbiór $\Pi(Q_{L_\nu}, r_0)$, oraz:

$$D'\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy = L\int\int_{Q_{L_\nu}\cdot R} f(x,y)\,dx\,dy + \sum_{i=1}^{\infty} CL_\nu \int\int_{r_i} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{dla } R \subset r_0.$$

Stosując do CL_ν operację H. usuwamy punkty osobliwości z prostokąta M_0, zatem operacja $L_{\nu+1}$ nie posiada w r_0 punktów osobliwych, czyli zbiór $\Pi(Q_{L_{\nu+1}}, r_0)$ jest pusty, a więc równość (1) jest fałszywa; istnieje tedy takie μ, że zbiór Q_{L_μ} jest pusty, skąd:

$$D' \subset \sum_{\xi<\Omega} L_\xi,$$

a więc ostatecznie:

$$D' = \sum_{\xi<\Omega} L_\xi.$$

V. Całka P'.

§ 19. Narzuca się teraz pytanie: jaki jest stosunek całki D', która była przedmiotem rozważań dwóch ostatnich rozdziałów, do całek podwójnych Perrona. Zauważmy przedewszystkiem, że każdemu określeniu pochodnej funkcji prostokąta, przyjętemu w definicji całki podwójnej Perroną, odpowiadałaby inna całka, przyczem poszczególne całki nie byłyby naogół równoważne [1]).

Podamy natomiast określenie całki podwójnej P', analogicznej do całki Perrona, w którem wyzyskany będzie pomysł Riddera [2]) i zobaczymy, że całka ta okaże się równoważna całce D'.

---

[1]) Jedno z takich określeń, odpowiadające pochodnej Banacha, znajdujemy w monografji p. Saksa: „Théorie de l'intégrale", p. 128. Gdybyśmy jednak chcieli porównać określoną przez p. Saksa całkę podwójną Perrona z całką D', napotykamy zasadnicze trudności ze względu na to, że ze skończoności pochodnych skrajnych Banacha funkcji $F(R)$ na zbiorze E nie można wnioskować o istnieniu przyrostu określonego funkcji $F(R)$ na zbiorze E. W każdym razie, jak to wynika z tw. I, § 20, całka P' jest całką Perrona, w znaczeniu podanem przez p. Saksa.

[2]) J. Ridder. Über den Perronschen Integralbegriff. Math. Zeitschr. 34, p. 234.

Definicja całki P' oparta będzie na rozważaniu klasy funkcyj nawpół bezwzględnie ciągłych uogólnionych i pochodnych skrajnych w znaczeniu Banacha.

Funkcję $F(R)$ będziemy nazywali *nawpół bezwzględnie ciągłą górnie na zbiorze E*, jeżeli dla dowolnego układu prostokątów R_1, $R_2, \ldots, R_n$ rozłącznych, zawierających punkty zbioru E i zawartych w prostokącie R_E ograniczającym ten zbiór, nierówność:

$$\sum_i |R_i| < \eta$$

pociąga za sobą, przy dostatecznie małem η, nierówność:

$$\sum_i F(R_i) < \varepsilon;$$

Funkcję $F(R)$ będziemy nazywali *nawpół bezwzględnie ciągłą dolnie*, jeżeli dla takiegoż układu $\{R_i\}$ prostokątów nierówność:

$$\sum_i |R_i| < \eta$$

pociąga za sobą, przy dostatecznie małem η, nierówność:

$$\sum_i F(R_i) > -\varepsilon.$$

Funkcję $F(R)$ będziemy nazywali *bezwzględnie ciągłą uogólnioną górnie (dolnie) w prostokącie R_0*, jeżeli ten prostokąt jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów, na których $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła górnie (dolnie) i posiada przyrost określony. W skróceniu będziemy oznaczali te funkcje odpowiednio $SACG'$ i $IACG'$.

Twierdzenie. *Na to, by funkcja $F(R)$ była w prostokącie R_0 funkcją $SACG'$ ($IACG'$), trzeba i wystarcza, by każdy zbiór domknięty, zawarty w R_0, posiadał kawałek, na którym funkcja $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła górnie (dolnie) i posiada przyrost określony.*

Dowód tego twierdzenia niczem się nie różni od dowodu twierdzenia I § 6.

§ 20. Udowodnimy teraz kilka twierdzeń, dotyczących własności pochodnych Banacha funkcyj $SACG'$ i $IACG'$.

Twierdzenie I. *Jeżeli funkcja $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła górnie (dolnie) na zbiorze E, wówczas prawie wszędzie na tym zbiorze jej pochodna górna $\overline{F}(x, y) < +\infty$ (dolna $\underline{F}(x, y) > -\infty$).*

Wystarczy dowieść twierdzenia dla funkcyj bezwzględnie ciągłych górnie; analogiczny wniosek o funkcjach bezwzględnie ciągłych dolnie wynika przez zmianę znaku.

Niech $Q' \subset Q$ będzie zbiorem punktów, w których $\overline{F}(x, y) = +\infty$. Przypuśćmy, że posiada on miarę dodatnią, w takim razie posiada podzbiór Q'' o mierze dodatniej mniejszej od η, gdzie η jest dowolną liczbą dodatnią. Oznaczmy $|Q''| = M$ i weźmy pod uwagę rodzinę kwadratów $\overline{K}$, zawartych w prostokącie R_Q, ograniczającym zbiór Q, oraz takich, że nierówność:

$$|\overline{K}| < \frac{1}{n}$$

pociąga za sobą nierówność:

$$F(\overline{K}) > n|\overline{K}|. \tag{1}$$

Rodzina ta pokrywa zbiór Q'' w sensie Vitali'ego, przeto istnieje układ skończony kwadratów tej rodziny takich, że:

$$\sum_m |\overline{K}_m| > |Q''| - \delta = M - \delta.$$

Ze względu na (1), mamy:

$$\sum_m F(\overline{K}_m) > nM - n\delta.$$

Lecz można η dobrać tak, że:

$$\sum_m F(\overline{K}_m) < \varepsilon,$$

skąd, ze względu na dowolność n dochodzimy do sprzeczności z założeniem, że $M > 0$, zatem $M = 0$, czyli także $|Q'| = 0$.

L e m m a t. *Jeżeli funkcja $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła górnie (dolnie) na zbiorze Q miary zero, poza którym pochodna górna $\overline{F}(x, y) \leqslant 0$ (dolna $\underline{F}(x, y) \geqslant 0$) w prostokącie R_0, wówczas $F(R)$ jest w R_0 stale niedodatnia (nieujemna).*

D o w ó d. Niech prostokąt R będzie dowolnym prostokątem zawartym w R_0. Rodzina kwadratów $\overline{K}$ takich, że $F(\overline{K}) \leqslant 0$ pokrywa dopełnienie zbioru Q do R w sensie Vitali'ego, przeto można utworzyć układ skończony prostokątów $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \ldots, \overline{R}_n, \ldots$, zawartych w R i takich, że:

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{R}_i| \geqslant |R| - \eta, \tag{2}$$

przyczem na każdym z nich:

$$F(\overline{R}_i) \leqslant 0.$$

Pozostaje w R układ skończony prostokątów $\{r_j\}$, zawierających punkty zbioru Q.

Ze względu na (2), można dobrać η tak, by:

$$\sum_j F(r_j) < \varepsilon;$$

wówczas:

$$F(R) < \varepsilon$$

i, z uwagi na dowolność ε, $F(R) \leqslant 0$.

Przez zmianę znaku funkcji dowodzimy lemmat dla funkcji bezwzględnie ciągłej dolnie.

Twierdzenie II. *Funkcja SACG′ (IACG′) posiadająca prawie wszędzie pochodną górną niedodatnią (dolną nieujemną) jest stale niedodatnia (nieujemna).*

Dowód niczem się nie różni od dowodu twierdzenia I, § 10.

§ 21. Funkcją *zwyższającą* dla funkcji $f(x, y)$ w prostokącie R_0 będziemy nazywali każdą funkcję $U(R)$, $IACG'$ w R_0, taką, że: $\underline{U}(x, y) \geqslant f(x, y)$ prawie wszędzie w R_0.

Funkcją *zniższającą* dla funkcji $f(x, y)$ w prostokącie R_0 będziemy nazywali każdą funkcję $V(R)$, $SACG'$ w R_0, taką, że: $\overline{V}(x, y) \leqslant f(x, y)$ prawie wszędzie w R_0.

Twierdzenie. *Różnica między dowolną funkcją zniższającą $U(R)$ i dowolną funkcją zwyższającą $V(R)$ dowolnej funkcji $f(x, y)$ jest stale nieujemna.*

Dowód. Oznaczając:

$$\Delta(R) = U(R) - V(R).$$

mamy:

$$(1) \qquad \underline{\Delta}(x, y) \geqslant \underline{U}(x, y) - \overline{V}(x, y)$$

oraz prawie wszędzie:

$$(2) \qquad \underline{U}(x, y) \geqslant f(x, y) \geqslant \overline{V}(x, y);$$

zaznaczone w nierówności (1) odejmowanie jest, ze względu na twierdzenie I § 20, prawie wszędzie wykonalne. Ze względu na (1) i (2), prawie wszędzie: $\underline{\Delta}(x, y) \geqslant 0$, a ponieważ $\Delta(R)$ jest funkcją $IACG'$, przeto, na zasadzie twierdzenia II poprzedniego paragrafu: $\Delta(R) \geqslant 0$.

§ 22. Będziemy nazywali *całką górną* $\overline{P}'$ funkcji $f(x, y)$ w prostokącie R_0 kres dolny wszystkich funkcyj zwyższających funkcji $f(x, y)$ w prostokącie R_0. Podobnież *całką dolną* $\underline{P}'$ funkcji $f(x, y)$ w prostokącie R_0, będziemy nazywali kres górny wszystkich funkcyj zniższających funkcji $f(x, y)$ w tym prostokącie.

Jeżeli obie te całki są równe, wówczas funkcja $f(x, y)$ jest *całkowalna P′* w prostokącie R_0. Wspólna wartość tych całek jest całką P' funkcji $f(x, y)$ w prostokącie R_0 i piszemy:

$$P' \iint_{R_0} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Jeżeli $f(x, y)$ jest całkowalna P' w prostokącie R_0, wówczas jest całkowalna P' w każdym prostokącie $R \subset R_0$. Określona w ten sposób funkcja addytywna prostokąta jest całką nieoznaczoną P' funkcji $f(x, y)$ w prostokącie R_0.

§ 23. Poniższe twierdzenie rzuci światło na własności całki P' i natychmiastową jego konsekwencją będzie równoważność całek D' i P'.

Twierdzenie I. *Całka nieoznaczona P′ jest funkcją ACG′, zaś jej pochodna jest prawie wszędzie równa funkcji podcałkowej.*

Dowód. Przypuśćmy, że funkcja $f(x, y)$ jest w prostokącie R_0 całkowalna P' i oznaczmy:

$$F(R) = P' \iint_{R} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Stwierdzimy przedewszystkiem, że jeżeli $U(R)$ jest dowolną funkcją zwyższającą funkcji $f(x, y)$, zaś $V(R)$ dowolną funkcją zniższającą wówczas:

(1) $$V(R) \leqslant F(R) \leqslant U(R).$$

Istotnie, można funkcję zniższającą V_ε dobrać tak, by:

$$|F(R) - V_\varepsilon(R)| < \varepsilon,$$

gdzie ε jest dowolnie małe. Wówczas:

$$U(R) - F(R) = U(R) - V_\varepsilon(R) + V_\varepsilon(R) - F(R) \geqslant V_\varepsilon(R) - F(R) > -\varepsilon,$$

skąd:

$$U(R) - F(R) \geqslant 0.$$

Podobnie wykażemy, że:

$$F(R) - V(R) \geqslant 0.$$

Ze względu na określenie całki P', można utworzyć ciąg $\{U_n(R)\}$ funkcyj zwyższających i ciąg $\{V_n(R)\}$ funkcyj zniższają-

cych tak, by różnica między odpowiadającemi sobie wyrazami tych ciągów zmierzała do zera wraz z $\frac{1}{n}$. Wówczas, dla $n > N$:

$$U_n(R_0) - V_n(R_0) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Prostokąt R_0 jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów, na których $U_n(R)$ są bezwzględnie ciągłe dolnie, zaś $V_n(R)$ są bezwzlędnie ciągłe górnie, przy każdem n, i wszystkie te funkcje posiadają na tych zbiorach przyrost określony. Niech np. E będzie jednym z takich zbiorów. Wykażemy, że $F(R)$ jest bezwzględnie ciągła na E i posiada na nich przyrost określony.

Przypuśćmy w tym celu, że $R_1, R_2, \ldots, R_m$ jest dowolnym ciągiem prostokątów rozłącznych, zawierających punkty zbioru E i zawartych w prostokącie, ograniczającym ten zbiór. Przez $R_1', R_2', \ldots, R_p'$ oznaczmy te prostokąty układu, na których $F(R)$ jest nieujemna. Pozostałe prostokąty oznaczmy przez $R_1'', R_2'', \ldots, R_q''$. Można dobrać η w ten sposób, że nierówność:

$$\sum_{l=1}^{m} |R_l| < \eta$$

będzie pociągała za sobą:

$$\sum_{k=1}^{p} V_n(R_k') < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

oraz:

$$\sum_{l=1}^{q} U_n(R_l'') > -\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Ze względu na (1) i (2):

$$\sum_{k=1}^{p} [V_n(R_k') - F(R_k')] > -\frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

oraz:

$$\sum_{l=1}^{q} [U_n(R_l'') - F(R_l'')] < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Nierówności (3), (4), (5) i (6) dają ostatecznie:

$$0 \geqslant \sum_{l=1}^{q} F(R_e'') = \sum_{l=1}^{q} U_n(R_e'') - \sum_{l=1}^{q} [U_n(R_e'') - F(R_e'')] > -\varepsilon$$

oraz:

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{p} F(R_k') = \sum_{k=1}^{p} V_n(R_k') - \sum_{k=1}^{p} [V_n(R_k') - F(R_k')] < \varepsilon.$$

Zatem:

$$\sum_{i=1}^{m} |F(R_i)| < 2\varepsilon.$$

W zupełnie podobny sposób wykażemy, że $F(R)$ posiada na E przyrost określony.

Istotnie, niech E' będzie dowolnym podzbiorem domkniętym zbioru E, zaś $\{R_i^{(1)}\}$ i $\{R_i^{(2)}\}$ dwoma ciągami prostokątów, czyniących zadość warunkom, wyszczególnionym w definicji przyrostu funkcji na zbiorze[1]), a, między innemi, warunkowi:

$$|\sum_i R_i^{(j)} - E| < \eta, \qquad j = 1, 2.$$

Istnieje funkcja zwyższająca $U(R)$ taka, że:

$$|U(R_0) - F(R_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ponieważ różnica $U(R) - F(R)$ jest funkcją nieujemną prostokąta R, więc:

$$|\sum_i U(R_i^{(j)}) - \sum_i F(R_i^{(j)})| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{dla } j = 1, 2.$$

Lecz $U(R)$ posiada przyrost określony na zbiorze E, przeto można dobrać η tak, by:

$$|\sum_i U(R_i^{(1)}) - \sum_i U(R_i^{(2)})| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wówczas:

$$|\sum_i F(R_i^{(1)}) - \sum_i F(R_i^{(2)})| \leqslant |\sum_i F(R_i^{(1)}) - \sum_i U(R_i^{(1)})| + |\sum_i U(R_i^{(1)}) - \sum_i U(R_i^{(2)})| +$$
$$+ |\sum_i U(R_i^{(2)}) - \sum_i F(R_i^{(2)})| < \varepsilon,$$

co dowodzi, że $F(R)$ posiada na zbiorze E przyrost określony.

---

[1]) § 4, str. 8.

Zatem $F(R)$ jest w R_0 funkcją ACG' i, jako ACG', jest w tym prostokącie prawie wszędzie różniczkowalna.

Pozostaje stwierdzić, że prawie wszędzie w R_0 zachodzi równość:

$$F'(x, y) = f(x, y).$$

Otóż jednocześnie prawie wszędzie w tym prostokącie:

(7) $$\underline{U}(x, y) \geqslant F'(x, y) \geqslant \overline{V}(x, y)$$

oraz:

(8) $$\underline{U}(x, y) \geqslant f(x, y) \geqslant \overline{V}x, y).$$

Oznaczmy, jak poprzednio:

$$\Delta(R) = U(R) - V(R).$$

Można funkcję zwyższającą $U(R)$ i zniższającą $V(R)$ dobrać tak, by:

$$\Delta(R_0) < \varepsilon^2.$$

Funkcja $\Delta(R)$, jako nieujemna, jest prawie wszędzie różniczkowalna w R_0. Oznaczmy przez Q_ε zbiór punktów prostokąta R_0, w których:

(9) $$\Delta'(x, y) \geqslant \varepsilon.$$

Mamy wówczas:

$$\Delta(R_0) \geqslant \varepsilon |Q_\varepsilon|,$$

skąd:

$$|Q_\varepsilon| < \varepsilon.$$

Otóż z (7), (8), (9) wynika, że prawie wszędzie na $R_0 - Q_\varepsilon$:

$$|F'(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon,$$

zatem, ze względu na to, że ε może być uczynione dowolnie małe, prawie wszędzie w R_0:

$$F'(x, y) = f(x, y).$$

Twierdzenie zostało całkowicie udowodnione.

T w i e r d z e n i e II. *Całka P' jest równoważna całce D'.*

Istotnie, z jednej strony każda funkcja całkowalna P' jest prawie wszędzie pochodną funkcji ACG', zatem jest całkowalna D'. Z drugiej strony całka D' funkcji całkowalnej D' jest jednocześnie jej funkcją zwyższającą i zniższającą.

B J a